Električna mjerenja

(pomoćni materijal za predavanja)

Univerzitet Crne Gore

Elektrotehnički fakultet

GREŠKE KOD INDIREKTNIH MJERENJA (SLOŽENE GREŠKE)

- **Kod indirektnih mjerenja, mjerni rezultat y je funkcija direktno mjerenih veličina** x_i , i=1,2,3,...n, i dat je oblikom $y=f(x_1, x_2, x_3,..., x_n)$;
- Ako su poznate vrijednosti **sistematskih grešaka** mjerenih veličina (npr. iz tablica baždarenja) Δx_1, Δx_2.....Δx_n, onda se sistematska greška Δy može odrediti pomoću **totalnog diferencijala funkcije** y:

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i\right)$$

- Prethodna relacija pokazuje kako nesigurnost indirektno mjerene veličine y zavisi od promjena direktno mjerene veličine i njene mjerne nesigurnosti.
- Pretpostavljeno je: $\frac{\Delta x_i}{x_i} \ll 1$
- Ukoliko to nije slučaj primjenjuje se matematička **metoda konačnih priraštaja** date funkcije:

$$y + \Delta y = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots x_n + \Delta x_n)$$

GREŠKE KOD INDIREKTNIH MJERENJA (SLOŽENE GREŠKE)

- Apsolutna sistemska greška indirektno mjerene veličine:

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots x_n)$$

- Relativna greška indirektno mjerene veličine definiše se kao:

$$\delta_y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots x_n + \Delta x_n)}{f(x_1, x_2, \dots x_n)} - 1$$

- Relativna procentualna sistemska greška:

$$\delta_{y\%} = \frac{\Delta y}{y} 100$$

MJERNA NESIGURNOST KOD INDIREKTNOG MJERENJA

- Ako se mjereni rezultat $y=f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ odredjuje mjerenjem veličina $\boldsymbol{x_i}$, i=1,2,3,...n, pa se pri tome izmjerene vrijednosti tih veličina rasipaju zbog djelovanja slučajnih grešaka, onda se u izrazu totalnog diferencijala funkcije y, greške Δx_i mijenjaju od slučaja do slučaja i po veličini po predznaku. Stoga greške Δx_i možemo posmatrati kao n nezavisnih skupova koji su pomnoženi faktorima $\partial f(x_i)/\partial x_i$.
- Shodno izrazu:

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i\right)$$

možemo odrediti standardnu devijaciju s_y funkcije y, ako su poznate standardne devijacije s(x_i) mjerenih veličina:

$$s_y^2 = \left(\frac{\partial f(x_1)}{\partial x_1}\right)^2 s^2(x_1) + \left(\frac{\partial f(x_2)}{\partial x_2}\right)^2 s^2(x_2) + \ldots + \left(\frac{\partial f(x_n)}{\partial x_n}\right)^2 s^2(x_n) \Rightarrow {s_y}^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i}\right)^2 s^2(x_i)$$

Standardne devijacije osnovnih funkcija

- 1. $y = x_1 \cdot x_2$ $\Rightarrow$ $s_y = \sqrt{{x_2}^2{s_1}^2 + {x_1}^2{s_2}^2}$ $s_{y\%} = \sqrt{{s_{1\%}}^2 + {s_{2\%}}^2}$

- 2. $y = \dfrac{x_1}{x_2}$ $\Rightarrow$ $s_y = \sqrt{\dfrac{{s_1}^2}{{x_2}^2} + \dfrac{{x_1}^2{s_2}^2}{{x_2}^4}}$ $s_{y\%} = \sqrt{{s_{1\%}}^2 + {s_{2\%}}^2}$

- 3. $y = x_1 \pm x_2$ $\Rightarrow$ $s_y = \sqrt{{s_1}^2 + {s_2}^2}$ $s_{y\%} = \dfrac{\sqrt{{x_1}^2{s_{1\%}}^2 + {x_2}^2{s_{2\%}}^2}}{x_1 \pm x_2}$

Zadatak 1.4. Koliko iznosi procentualna standardna devijacija serijske, odnosno paralelne kombinacije dva otpornika od 50 Ω sa standardnom devijacijom 0,5 % i od 100 Ω sa standardnom devijacijom 1,5 %.

$$R_1 = 50\Omega,\ R_2 = 100\Omega$$

$$s_{1\%} = 0.5\%,\ s_{2\%} = 1.5\%$$

$$s_{1\%} = \frac{s_1}{R_1}100 \qquad s_{2\%} = \frac{s_2}{R_2}100$$

$$R_s = R_1 + R_2$$

Standardnu devijaciju računamo prema izrazu:

$$s_R = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial R}{\partial R_i}\cdot s_i\right)^2}$$

odnosno:

$$s_R^2 = \left(\frac{\partial R_s}{R_1}\cdot s_1\right)^2 + \left(\frac{\partial R_s}{R_2}\cdot s_2\right)^2$$

Parcijalne derivacije iznose:

$$\frac{\partial R_s}{R_1} = 1 \ \text{ i } \ \frac{\partial R_s}{R_2} = 1$$

Dalje slijedi:

$$s_R = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$$

Procentualna st. dev. redne veze otpornika:

$$s_{R\%} = \frac{s_R}{R_s}100 = \frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{R_1 + R_2}100$$

$$s_{R\%} = \frac{\sqrt{R_1^2 s_{1\%}^2 + R_2^2 s_{2\%}^2}}{R_1 + R_2}$$

$$s_{R\%} = 1{,}014\ \%$$

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Standardnu devijaciju računamo prema izrazu:

$$s_p^2 = \left(\frac{\partial R_p}{\partial R_1} s_1\right)^2 + \left(\frac{\partial R_p}{\partial R_2} s_2\right)^2$$

Parcijalne derivacije iznose:

$$\frac{\partial R_p}{\partial R_1} = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2}$$

$$\frac{\partial R_p}{\partial R_2} = \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2}$$

pa je:

$$s_p = \sqrt{\frac{R_2^4}{(R_1 + R_2)^4} s_1^2 + \frac{R_1^4}{(R_1 + R_2)^4} s_2^2}$$

$$s_{1\%} = \frac{s_1}{R_1} 100 \qquad s_{2\%} = \frac{s_2}{R_2} 100$$

Procentualna st. dev. paral. veze otpornika:

$$s_{p\%} = \frac{s_p}{R_p} 100 = \frac{\sqrt{R_2^2 s_{1\%}^2 + R_1^2 s_{2\%}^2}}{R_1 + R_2}$$

Sigurne granice grešaka u funkciji direktno mjerenih veličina

- U praksi su najčešće poznate samo **granice grešaka** pri mjerenju veličina (garantovana ili dozvoljena najveća odstupanja od prave vrijednosti) upotrijebljenih mjernih uredjaja.
- Ako se do traženog rezultata dolazi indirektno na osnovu mjerenja nekih drugih veličina, onda granice grešaka rezultata y možemo odrediti tako da u totalni diferencijal funkcije uvrstimo umjesto Δx_i poznate granice grešaka $\pm G_i$ mjerenih veličina $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- U najnepovoljnijem slučaju, prave vrijednosti mjerenih veličina mogu se nalaziti bilo na donjoj, bilo na gornjoj granici greške, pa granice grešaka funkcije neće sigurno sigurno biti premašene ako saberemo apsolutne vrijednosti parcijalnih diferencijala funkcije:

$$G'_y = \pm\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial x_1} G_1\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2} G_2\right| + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n} G_n\right|\right\} = \pm\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i} G_i\right|$$

SIGURNE GRANICE GREŠKE

Sigurne granice grešaka u funkciji direktno mjerenih veličina

$$G_y'\% = \frac{G_y'}{y}100$$

- Sigurne granice grešaka proizvoda: $y = x_1x_2$

$$G_y' = \pm\left\{\left|x_2G_1\right| + \left|x_1G_2\right|\right\} \qquad G_y'\% = \pm\left\{\left|G_1\%\right| + \left|G_2\%\right|\right\}$$

- Sigurne granice grešaka količnika: $y = x_1/x_2$

$$G_y' = \pm\left\{\left|\frac{G_1}{x_2}\right| + \frac{x_1\left|G_2\right|}{x_2^2}\right\} \qquad G_y'\% = \pm\left\{\left|G_1\%\right| + \left|G_2\%\right|\right\}$$

- Sigurne granice grešaka zbira: $y = x_1 + x_2$

$$G_y' = \pm\left\{\left|G_1\right| + \left|G_2\right|\right\} \qquad G_y'\% = \pm\frac{\left|x_1G_1\%\right| + \left|x_2G_2\%\right|}{x_1 + x_2}$$

- Sigurne granice grešaka razlike: $y = x_1 - x_2$.

$$G_y' = \pm\left\{\left|G_1\right| + \left|G_2\right|\right\} \qquad G_y'\% = \pm\frac{\left|x_1G_1\%\right| + \left|x_2G_2\%\right|}{x_1 - x_2}$$

Statističke granice grešaka u funkciji direktno mjerenih veličina

- Prethodni izraz obuhvata prilično širok interval jer predstavlja najnepovoljniji slučaj granične greške.
- Zato se obično uzimaju tzv. **statističke (vjerovatna) granice greške**, koja je manja od prethodne, a računa se pomoću formule:

$$G''_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} G_i\right)^2}$$

- Detaljnija razmatranja pokazuju da statistička sigurnost ovih granica iznosi otprilike 95%, ako je rezultat dobijen na osnovi mjerenja dvije veličine čije su standardne devijacije dva puta manje od njihovih granica grešaka

$(s_1=0{,}5G_1$ i $s_2 = 0{,}5G_2)$.

KOMBINOVANA MJERNA NESIGURNOST (indirektna mjerenja)

- Kod indirektnih metoda mjerenja rezultujuća mjerna nesigurnost za y=f(x_i), sa nekorelisanim greškama mjerenja izračunava se kao:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$$

$$u(y)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)$$

- gdje je: $u(x_i) = \sqrt{u_A{}^2(x_i) + u_B{}^2(x_i)}$

- Za računanje mjerne nesigurnosti indirektnog mjerenja, koriste se parcijalni izvodi direktno mjerenih veličina i pojedinačne kombinovane mjerne nesigurnosti za direktno mjerene veličine.
- Pretpostavka je da su poznate mjerne nesigurnosti tipa A i tipa B, **ukupna odnosno kombinovana mjerna nesigurnost $u(x_i)$**

Zadatak 1.5. Koliko iznose procentualne sigurne granice grešaka serijske, odnosno paralelne kombinacije dva kondenzatora:

$$C_1 = 0{,}1\ \mu\text{F} \pm 1\ \%$$

$$C_2 = 2\ \mu\text{F} \pm 1{,}5\ \%$$

Kapacitet serijske kombinacije dva kondenzatora iznosi:

$$C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Apsolutni iznos sigurnih granica grešaka računamo prema izrazu:

$$G_C = \pm \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial C_s}{\partial C_i} \cdot G_i \right|$$

odnosno:

$$G_C = \pm \left[\left| \frac{\partial C_s}{\partial C_1} \cdot G_1 \right| + \left| \frac{\partial C_s}{\partial C_2} \cdot G_2 \right| \right]$$

$$\frac{\partial C_s}{\partial C_1} = \frac{C_2^2}{(C_1 + C_2)^2}$$

$$\frac{\partial C_s}{\partial C_2} = \frac{C_1^2}{(C_1 + C_2)^2}$$

$$G_C = \pm \left[\left| \frac{C_2^2}{(C_1 + C_2)^2} G_1 \right| + \left| \frac{C_1^2}{(C_1 + C_2)^2} G_2 \right| \right]$$

Procentualna sigurna granice grešaka serijske kombinacije 2 kondenzatora iznosi:

$$G_{C\%} = \frac{G_C}{C_s}100 = \pm\left[\left|\frac{C_2 G_{1\%}}{C_1 + C_2}\right| + \left|\frac{C_1 G_{2\%}}{C_1 + C_2}\right|\right]$$

$$G_{C\%} = \pm 1{,}024\ \%$$

Ukupni kapacitet paralelne kombinacije 2 kondenzatora je:

$$C_p = C_1 + C_2$$

Apsolutni iznos sigurnih granica grešaka iznosi:

$$G_p = \pm\left[\left|\frac{\partial C_p}{\partial C_1}G_1\right| + \left|\frac{\partial C_p}{\partial C_2}G_2\right|\right]$$

Parcijalne derivacije iznose:

$$\frac{\partial C_p}{\partial C_1} = 1 \quad \text{i} \quad \frac{\partial C_p}{\partial C_2} = 1$$

Dalje slijedi:

$$G_p = \pm\left[|G_1| + |G_2|\right]$$

Procentualne sigurne granice grešaka paralelne kombinacije kondenzatora iznose:

$$G_{C\%} = \frac{G_p}{C_p}100 = \pm\frac{|C_1 G_{1\%}| + |C_2 G_{2\%}|}{C_1 + C_2}$$

$$G_{C\%} = 1{,}07\ \%$$